1.2.6 Reálná čísla II

Předpoklady: 010205

Pedagogická poznámka: Úvodní část hodiny by neměla přesáhnout deset minut. Většina žáků nemá problémy, s menšinou pak bývá třeba uspořádat doučování.

Př. 1: Jsou dána záporná reálná čísla *a*, *b*, *c* a kladné reálné číslo *d*. Platí $a<b$. Rozhodni, jaké znaménko mají čísla: $a+c$; ab; cd; $b-a$; $b-d$; $d-a$; $d(a+b)$; $c(a-b)$; $\frac{a+c}{b}$; a^2+b^2; a^2-b^2

$a+c<0$ - součet záporných čísel
$ab>0$ - součin záporných čísel
$cd<0$ - součin kladného a záporného čísla
$b-a>0$ - $a<b \Rightarrow a$ je na ose vlevo od *b* $\Rightarrow -a>0$ a je dál od nuly než *b*
$b-d<0$ - $b-d=b+(-d)<0$ - součet dvou záporných čísel
$d-a>0$ - $d-a=d+(-a)$ - součet kladných čísel
$d(a+b)<0$ - součin kladného a záporného čísla
$c(a-b)>0$ - součin záporných čísel, $a-b=-(b-a)$ viz. výše
$\frac{a+c}{b}>0$ - podíl dvou záporných čísel
$a^2+b^2>0$ - součet dvou kladných čísel
$a^2-b^2>0$ - *a* je dál od nuly, jeho druhá mocnina je větší

Pedagogická poznámka: Cílem předchozího příkladu je rozvíjet představivost o velikosti a znaménku čísel. Největší problémy jsou s výrazy $b-a$ a a^2-b^2. Studenti si neuvědomují, že i když je číslo $a<b$, jeho absolutní hodnota je větší než absolutní hodnota čísla *b*, protože obě čísla jsou nalevo od nuly. Studenti podvědomě soudí podle situace v kladné části číselné osy.
Při opravě příkladu si říkáme, že k výsledkům můžeme docházet více způsoby. Například si představit (viz. řešení příkladu), pokud si nejsme jistí, nakreslit si čísla na osu (pomáhá to představivosti), pokud nejistota přetrvává, ozkoušet výsledek dosazením konkrétních hodnot.

Př. 2: Jsou dána záporná reálná čísla *a*, *b*, *c* a kladné reálné číslo *d*. Platí $a<b$. Porovnej čísla: a) $ac \quad bc$, b) $ad \quad bd$.

$ac>bc$ - platí $a<b$, násobíme záporným číslem.
$ad<bd$ - platí $a<b$, násobíme kladným číslem.

Pedagogická poznámka: Zbytek hodiny probíhá následovně. Zkontrolujeme si, zda někdo objevil řešení posledního příkladu (pouze číslo, u kterého nejdou určit platné cifry) předchozí hodiny a pak nechám žáky samostatně s využitím internetu řešit následující úkoly. Nejpozději 10 minut před koncem hodiny hledání přerušíme a

společně zkontrolujeme výsledky.
Stránky, na které se mají žáci podívat, nejsou uvedeny schválně, jde i o hledání na internetu a vybírání relevantních zdrojů. Během samostatné práce se snažím pomáhat těm, kteří se z různých důvodů zaseknou.
Důležité je závěrečné společné hodnocení, kde by se právě relevance zdrojů, ale i přístup některých stránek měl projevit.

Př. 3: Ze zaokrouhleného čísla nemusí být vždy jasné, kolik má platných cifer. Najdi příklad takového čísla. Navrhni (nebo najdi) řešení tohoto problému.

Například číslo 20000 mohlo vzniknout zaokrouhlením:
- 19799 na jednu platnou cifru,
- 20477 na dvě platné cifry,
- 19967 na tři platné cifry,
- 20004 na čtyři platné cifry,
- …

Tento problém není možné řešit v samotném zápisu čísla 20000 jinak než tím, že o tomto čísle automaticky prohlásíme, že má pět platných cifer (**zřejmý rozpor s běžným očekáváním**). Pokud bychom chtěli vyjádřit, že číslo 20000 má pouze tři platné cifry, musíme:
- poslední platnou cifru vyznačit (například $20\bar{0}00$, ale neexistuje všeobecně uznávaný standard)
- popsat skutečnost slovně (20000 na tři platné cifry).

Problém řeší rozdělení čísla na součin:
- exponenciální tvar čísla: $20000 = 2{,}00 \cdot 10^5$ (první část čísla obsahuje pouze platné cifry $\Rightarrow$ číslo má tři platné cifry),
- česká technická norma: $20000 = 200 \cdot 10^2 = 200 \cdot 100$ (první část čísla obsahuje pouze platné cifry).

Př. 4: V technické praxi nebo ve vědeckých měřeních se neudává pouze správná hodnota, ale i rozsah spolehlivosti (například výška člověka je 181 cm plus mínus jeden centimetr). Jak se tyto hodnoty správně zapisují?

Tradiční zápis vypadá takto:
- 181 ± 1 cm $\Rightarrow$ výška člověka leží v rozmezí od 180 cm do 182 cm,
- $62{,}7 \pm 0{,}6$ kg $\Rightarrow$ hmotnost předmětu leží v rozmezí do 62,1 do 63,3 kg.

Zápis $62{,}7318 \pm 0{,}6$ je zjevně nesmyslný. Jestliže o hmotnosti víme, že leží v rozmezí od 62,1 do 63,3 kg nemá smysl udávat střední hodnotu na větší přesnost než jednu desetinu (obecně: **přesnost střední hodnoty by měla být stejného řádu jako nejistota výsledku**).
Tradiční zápis je všeobecně srozumitelný a používaný, neodpovídá však současné technické normě.
Zápis 181 ± 1 totiž přesně znamená pouze dvě krajní hodnoty (180 a 182 cm) (tak jsme ho používali ve vzorci pro kořeny kvadratické rovnice) a nezahrnuje všechny hodnoty mezi.

Správný zápis odpovídající normě:
- $181(1)$ cm $\Rightarrow$ výška člověka leží v rozmezí od 180 cm do 182 cm,
- $62{,}7(6)$ kg $\Rightarrow$ hmotnost předmětu leží v rozmezí do 62,1 do 63,3 kg.

Pokud není nejistota výsledku uvedena, má se za to, že nejistota je 5 v řádu o jedna menším než je přesnost střední hodnoty, tedy $31,4\,\mathrm{m}$ je to samé jako $31,40(5)$ (hodnota leží v rozmezí od 31,35 m do 31,45 m).

Př. 5: Zaokrouhlovací pravidlo "5 se zaokrouhluje nahoru" není všeobecně přijímáno, protože při zpracování statistických dat "zkresluje" výsledky. Proč a jakým způsobem výsledky zkresluje? Jakým pravidlem je nahrazováno?

Pokud zaokrouhlujeme 5 vždy nahoru (na větší číslo), průměr ze zaokrouhlených hodnot má tendenci být větší než průměr z původních hodnot:

- původní hodnoty: 1,5 a 2,5 $\Rightarrow$ průměr 2,
- zaokrouhlené hodnoty: 2 a 3 $\Rightarrow$ průměr 2,5.

Řešení (zaokrouhlování na sudou): Pokud se cifra, podle které zaokrouhlujeme, rovná pěti, zaokrouhlíme tak, abychom získali nejbližší číslo končící na sudou číslici:

- 1,5 zaokrouhlíme na 2 (končí na sudou číslici),
- 2,5 zaokrouhlíme také na 2 (3 nekončí na sudou číslici),
- průměr se tak po zaokrouhlení nezmění a zůstane roven 2.

Pedagogická poznámka: Zajímavé odkazy na předchozí témata:

http://www.purplemath.com/modules/rounding.htm : autor se problému s nejednoznačností počtu platných cifer vyhýbá.
http://www.usca.edu/chemistry/genchem/sigfig.htm: udán jednoznačný postup (neumožňuje však napsat 200 na dvě platné cifry).
http://moodle.lfhk.cuni.cz/moodle2/mod/book/view.php?id=2097&chapterid=459: vysvětlení rozsahu spolehlivosti.
http://cs.wikipedia.org/wiki/Zaokrouhlen%C3%AD: problém zaokrouhlování 5 nahoru.
http://www.altusvario.cz/?Document=3858: problém zaokrouhlování 5 nahoru.
http://www.py.cz/Zaokrouhlovani: zaokrouhlování 5 nahoru.
http://www.mg-akademie.cz/stranky_profesori/musilova/zaokrouhlovani%20v%20ucetnictvi.pdf: zaokrouhlování v účetnictví.

Př. 6: Zapiš číslo 1500 na:
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 platných cifer.

a) 2 platné cifry: $15\cdot100$ nebo $1,5\cdot10^3$.

b) 3 platné cifry: $150\cdot10$ nebo $1,50\cdot10^3$.

c) 4 platné cifry: 1500 nebo $1,500\cdot10^3$.

d) 5 platných cifer: $1500,0$ nebo $1,5000\cdot10^3$.

Př. 7: Urči počet platných cifer.
a) 300 b) $550,0$ c) $3,1\cdot 10^3$ d) $70\cdot 1000$ e) $8000\cdot 10$

a) 300: tři platné cifry.
b) $550,0$ čtyři platné cifry.
c) $3,1\cdot 10^3$ dvě platné cifry.
d) $70\cdot 1000$ dvě platné cifry.
e) $8000\cdot 10$ čtyři platné cifry.

Př. 8: V jakém rozmezí je hodnota, pokud je uvedeno:
a) $0,047(4)$ kg b) $12,7(15)$ kg c) $1200(3)$ kg d) $120\cdot 10(3)$ kg

a) $0,047(4)$ kg: od 0,043 kg do 0,051 kg.

b) $12,7(15)$ kg: od 11,2 kg do 14,2 kg.

c) $1200(3)$ kg: od 1197 kg do 1203 kg.

d) $120\cdot 10(3)$ kg: od 1170 kg do 1230 kg.

Př. 9: Zaokrouhli na sudou na tři platné cifry:
a) $12,75$ b) 59859 c) $0,05795$ d) 8945773

a) $12,75 \doteq 12,8$

b) $59859 \doteq 59800$

c) $0,05795 \doteq 0,0580$

d) $8945773 \doteq 8940000$

Shrnutí: Pravidla jsou taková, aby byl zápis jednoznačný.